23/10/2018.

Παράδειγμα

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{1,5,6,7\}$

$\Gamma = \{1,8,9\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$

$A \cap B = \{1\}$

$A - B = \{2,3\}$

$B - A = \{5,6,7\}$

$A \triangle B = \{2,3,5,6,7\}$

$A \cap B \cap \Gamma = \{1\}$

$A \cup B \cup \Gamma = \{1,2,3,5,6,7,8,9\}$

Άσκηση

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, Γ ν.δ.ο.

(i) $A \subseteq B \iff A - B = \emptyset$

Απάντηση.

Για να αποδείξουμε την ισοδυναμία δύο προτάσεων, αρκεί να αποδείξουμε την ισοδυναμία των αρνήσεων τους, διότι η $(p \iff q) \iff ((\neg p) \iff (\neg q))$ είναι ταυτολογία.

$$\sim(A\subseteq B) \Leftrightarrow \sim\left[\forall x\,(x\in A) \Rightarrow x\in B)\right]$$

$\Leftrightarrow \exists x$ τέτοιο ώστε $\left[\sim(x\in A \Rightarrow x\in B)\right] \Leftrightarrow$

$$\exists x\left[x\in A \sim (x\in B)\right]$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(x\in A \wedge x\notin B).$$

$$\Leftrightarrow \exists x\,(x\in A\setminus B).$$

$$\Leftrightarrow A\setminus B = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \sim(A\setminus B = \emptyset)$$

Συνεπώς $A\subseteq B \Leftrightarrow A\setminus B = \emptyset$.

ii) $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$

Για τυχαίο x : $x\in A\setminus(A\cap B) \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin A\cap B.$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A \vee x\notin B)$$

$p\wedge(q\vee r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ είναι ταυτολογία $\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A \wedge x\notin A)}_{\text{ψευδής}} \vee (x\in A \wedge x\notin B)$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B \Leftrightarrow x\in A\setminus B$$

χρησιμοποιήσαμε ότι
αν p ψευδής τότε η $p\vee q$
είναι αληθής αν-ν η q είναι
αληθής

Επομένως $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$.

iii) $A\cap(B\setminus\Gamma) = (A\cap B)\setminus(A\cap\Gamma)$

Έστω x : $x\in(A\cap B)\setminus(A\cap\Gamma) \Leftrightarrow x\in A\cap B \wedge x\notin A\cap\Gamma$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\wedge(x\notin A \vee x\notin\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x\in A\wedge x\in B \wedge x\notin A)}_{\text{ψευδής}}\vee(x\in B \wedge x\notin\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B \wedge x\notin\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B\setminus\Gamma \Leftrightarrow x\in A\cap B\setminus\Gamma$$

Επομένως

$A\cap(B-\Gamma) = (A\cap B)-(A\cap\Gamma)$

(iv) $A\cup(B-A) = A\cup B$.

Απόδειξη.

Έστω τυχαίο x

$$x\in A\cup(B-A) \iff x\in A \vee (x\in B-A)$$
$$\iff x\in A \vee (x\in B \wedge x\notin A)$$
$$\iff (x\in A \vee x\in B)\wedge\underbrace{(x\in A \vee x\notin A)}_{\text{αληθής}}$$

$p\vee(q\wedge r) \iff (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

είναι ταυτολογία.

$$\iff x\in A \vee x\in B$$
$$\iff x\in A\cup B.$$

αν q αληθής τότε η $p\wedge q$ είναι αληθής αν-ν η p είναι αληθής

Επομένως $A\cup(B-A) = A\cup B$.

$x\notin A\cap B \iff x\notin A \vee x\notin B$.

$x\notin A\cup B \iff x\notin A \wedge x\notin B$.

$x\notin A-B \iff x\notin A \vee x\in B$.

Άσκηση. Να δειχθεί ότι η πράξη της διαφοράς συνόλων δεν είναι προσεταιριστική.

Λύση

Αν ήταν προσεταιριστική, για κάθε A, B, Γ θα ίσχυε:

$$A\setminus(B\setminus\Gamma) = (A\setminus B)\setminus\Gamma$$

Για $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,3\}$, $\Gamma=\{2,4\}$

$B\setminus\Gamma=\{3\}$

$A\setminus(B\setminus\Gamma)=\{1,2,4\}$

$A\setminus B=\{1,4\}$

$(A\setminus B)\setminus\Gamma=\{1\}$

Για αυτά τα σύνολα: $A\setminus(B\setminus\Gamma)\neq(A\setminus B)\setminus\Gamma$

Άρα δεν ισχύει η προσεταιριστική.

Άσκηση

Να δειχθεί η ισοδυναμία.

$$A\cup B = A\cap B \iff A=B$$

Απόδειξη

$\Leftarrow)$ Αν $A=B$

τότε $A\cup B = A\cup A = A$

$A\cap B = A\cap A = A$

άρα $A\cup B = A\cap B$

$\Rightarrow)$ Υποθέτουμε $A\cup B = A\cap B$

Τότε
$$\left.\begin{aligned} A &\subseteq A\cup B = A\cap B \subseteq B \\ B &\subseteq A\cup B = A\cap B \subseteq A \end{aligned}\right\} \boxed{A=B}$$

Άσκηση

Αν Α,Β δύο σύνολα να δειχθεί η ισοδυναμία $A \setminus B = B - A \iff A = B$

Λύση.

$\Leftarrow$) Αν $A = B$ τότε $A \setminus B = A - A = \emptyset$, $B - A = A - A = \emptyset$ $\Big\} \Rightarrow A \setminus B = B - A$

$\Rightarrow$) Έστω ότι $A \setminus B = B - A$

Για να δείξω $A = B$ αρκεί να δείξω $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Θα δείξω ότι $A \subseteq B$

Για τυχαίο x με $x \in A$ Α.Δ.Ο. $x \in B$.

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $x \notin B$.

Τότε $x \in A - B$ εφόσον από υπόθεση $A \setminus B = B - A$ θα έχουμε $x \in B - A$ άρα $x \in B$ άτοπο.

Επομένως, $x \in B$.

Έτσι δείξαμε ότι $A \subseteq B$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $B \subseteq A$. Επομένως $A = B$.

Άσκηση.

Αν Α,Β,Γ τρία σύνολα. Να δείξω ότι: $(A \cap B) \cup \Gamma = A \cap (B \cup \Gamma) \iff \Gamma \subseteq A$.

Λύση.

$\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\Gamma \subseteq A$ τότε $A \cup \Gamma = A$.

Έτσι $(A \cap B) \cup \Gamma = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = A \cap (B \cup \Gamma)$

επιμεριστική της ένωσης ως προς την τομή.

⇒) Αντίστροφα υποθέταμε ότι

$(A\cap B)\cup \Gamma = A\cap(B\cup\Gamma)$

$\Gamma \subseteq (A\cap B)\cup\Gamma \underset{\text{από υπόθεση}}{=} A\cap(B\cup\Gamma)\subseteq A$

Άρα $\Gamma\subseteq A$.

Ορισμός: Για ένα σύνολο Α ορίζουμε δυναμοσύνολο του Α το σύνολο που έχει ως στοιχεία του όλα τα υποσύνολα του Α (και μόνο αυτά). Συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$.

$\mathcal{P}(A) = \{x : x\subseteq A\}$

$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$\mathcal{P}(\{\alpha\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}\}$

$\mathcal{P}(\{\alpha,\beta\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha,\beta\}\}$

$\mathcal{P}(\{\alpha,\beta,\gamma\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}\}$

$\mathcal{P}(\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}) = \{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}, \{\alpha,\beta\}, \{\beta,\gamma\}, \{\gamma,\delta\}, \{\alpha,\delta\}, \{\beta,\delta\}, \{\alpha,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}, \{\alpha,\beta,\gamma\}, \{\alpha,\beta,\delta\}, \{\beta,\gamma,\delta\}, \{\alpha,\gamma,\delta\}\}$

Παρατήρηση: Αν x, y υποσύνολα του Α (δηλ. $x,y\in\mathcal{P}(A)$) τότε τα

$x\cap y$, $x\cup y$, $x-y$, $y-x$, $x\Delta y$ είναι υποσύνολα του Α.

δηλ. ανήκουν στο $\mathcal{P}(A)$

Βασικό σύνολο και συμπλήρωμα συνόλου

Πολλές φορές τα σύνολα που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα είναι όλα υποσύνολα ενός δοσμένου συνόλου Ω. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το Ω είναι το βασικό σύνολο (για αυτό το πρόβλημα).

Αν $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ τότε $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \triangle B \in \mathcal{P}(\Omega)$

Αν $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ το $\Omega \setminus A$ θα λέγεται συμπλήρωμα του A και θα συμβολίζεται με A^c.

Έτσι $A^c = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega$ για τα οποία $x \notin A\}$

Ιδιότητες.

Αν A είναι υποσύνολο ενός βασικού συνόλου Ω

(i) $A \cup A^c = \Omega$

(ii) $A \cap A^c = \emptyset$

(iii) $(A^c)^c = A$

Απόδειξη.

(i) Έστω τυχαίο x

$x \in \Omega \iff x \in \Omega \wedge (x \in A \vee x \notin A) \iff (x \in \Omega \wedge x \in A) \vee (x \in \Omega \wedge x \notin A)$

$\iff x \in \Omega \cap A \vee x \in \Omega \setminus A$

$\iff x \in A \vee x \in A^c \iff x \in A \cup A^c$.

(ii) Αν $A \cup A^c \neq \emptyset$ τότε υπάρχει $x \in A \cap A^c$. Τότε $x \in A$ και $x \in A^c$. Συνεπώς $x \in A$ και $x \notin A$ άτοπο.

Άρα $A \cap A^c = \emptyset$

(iii) $x \in (A^c)^c \iff x \in \Omega \setminus A^c \iff x \in \Omega \wedge x \notin A^c \iff x \in \Omega \wedge x \notin \Omega \setminus A$

$\iff x \in \Omega \wedge (x \notin \Omega \vee x \in A) \iff x \in A$.

Ιδιότητες

Αν A, B υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω

(iv) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

v) $A \setminus B = A \cap B^c$

vi) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ } τύποι

(vii) $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$. } De Morgan

Απόδειξη.

Όλα τα σύνολα που αναφέρονται, υποθέτουμε ότι ανήκουν στο Ω.

(iv) Χρησιμοποιούμε την ταυτολογία $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((\sim q) \Rightarrow (\sim p))$

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B) \\ &\Leftrightarrow \forall x [(\sim (x \in B)) \Rightarrow (\sim (x \in A))] \\ &\Leftrightarrow \forall x [x \notin B \Rightarrow x \notin A] \\ &\Leftrightarrow \forall x [x \in B^c \Rightarrow x \notin A^c]. \\ &\Leftrightarrow B^c \subseteq A^c. \end{aligned}$$

(v) $x \in A \cap B^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \Omega \wedge x \notin B \Leftrightarrow$
$x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B$.

(vi)
$$\begin{aligned} & (x \in (A \cap B)^c \\ &\Leftrightarrow x \in \Omega \wedge x \notin A \cap B \\ &\Leftrightarrow x \in \Omega \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in \Omega \wedge x \notin A) \vee (x \in \Omega \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \vee x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

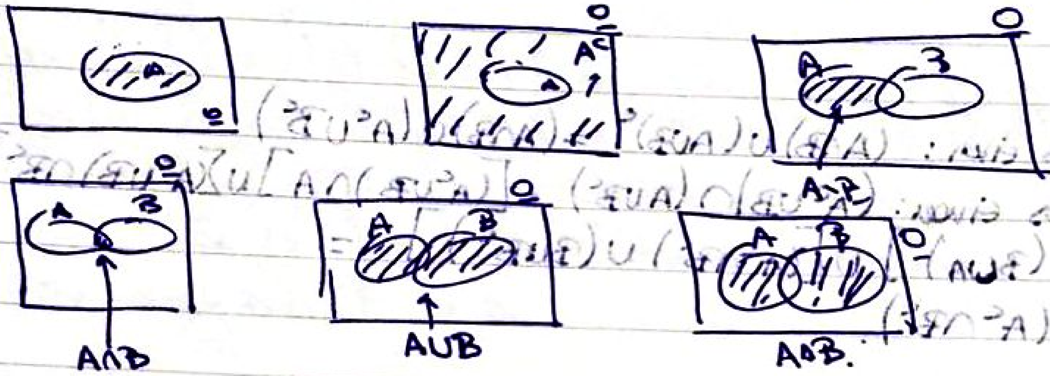
(vii) $x \in (A\cup B)^c \iff x \in \Omega \wedge x \notin (A\cup B) \iff x\in\Omega \wedge (x\notin A \wedge x \notin B)$

$\iff (x\in\Omega \wedge x\notin A)\wedge(x\in\Omega \wedge x\notin B)$

$\iff x\in A^c \wedge x\in B^c$

$\iff x \in A^c\cap B^c.$

Διαγράμματα Venn.



Σημείωση: Η χρησιμότητα των διαγραμμάτων Venn είναι ότι μας προσφέρουν εποπτεία. Σε καμία περίπτωση δεν υποκαθιστούν τις αποδείξεις (αλλά μπορούν να μας δώσουν μια ένδειξη για την αλήθεια κάποιων σχέσεων ώστε να ξέρουμε τι πρέπει να αποδείξουμε).

Παρατήρηση: Έστω Ω ένα βασικό σύνολο.

(i) Αν $A\subseteq\Omega$ τότε $\Omega = A\cup A^c$ με A, A^c ξένα.

(ii) Αν $A,B\subseteq\Omega$

$\Omega = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\cup(A^c\cap B^c)$ με τα σύνολα $A\cap B$, $A\cap B^c$, $A^c\cap B$, $A^c\cap B^c$ είναι ξένα ανά δύο και κάθε σύνολο που μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των A, B και των πράξεων συνόλων είναι ένωση κάποιων από τα παραπάνω τέσσερα σύνολα.

Αν θέλαμε να αποδείξαμε οποιαδήποτε ισότητα περιλαμβάνει μόνο δύο σύνολα, μπορούμε να εκφράσουμε (και τα δύο μέλη) ως ένωση κάποιων από τα παραπάνω.

Παράδειγμα.

Αν $A, B \subseteq \Omega$ (Ω βασικό)

Ν.δ.ο. $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$

Απόδειξη

Το δεύτερο μέλος είναι: $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

Το πρώτο μέλος είναι: $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c) = [(A^c \cup B) \cap A] \cup [(A^c \cup B) \cap B^c] =$

$= [(A^c \cap A) \cup (B \cap A)] \cup [(A^c \cap B^c) \cup (B \cap B^c)] =$

$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$.

Ομοίως αν έχω $A, B, \Gamma \subseteq \Omega$.

$A \cap B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma^c$, $A \cap B^c \cap \Gamma$, $A \cap B^c \cap \Gamma^c$, $A^c \cap B \cap \Gamma$, $A^c \cap B \cap \Gamma^c$, $A^c \cap B^c \cap \Gamma$, $A^c \cap B^c \cap \Gamma^c$

• Διατεταγμένο ζεύγος:

$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Διατεταγμένο ζεύγος με πρώτο μέλος το a και δεύτερο μέλος το b.

Πρόταση:

Για κάθε a, b, γ, δ

$(a, b) = (\gamma, \delta) \iff \begin{cases} a = \gamma \\ \text{και} \\ b = \delta \end{cases}$

Απόδειξη.

$\Leftarrow$) Αν $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$ τότε προφανώς $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$

$\Rightarrow$) Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$
δηλαδή $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$ (*)

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) $\alpha=\beta$. Τότε: $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\alpha\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha\}\}=\{\{\alpha\}\}$

Άρα $\{\{\alpha\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$.
Επομένως $\{\gamma,\delta\}\in\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$ άρα $\{\gamma,\delta\}\in\{\{\alpha\}\}$
Εφόσον $\gamma\in\{\gamma,\delta\}=\{\alpha\}$ προκύπτει ότι $\gamma=\alpha$
$\delta\in\{\gamma,\delta\}=\{\alpha\}$ προκύπτει ότι $\delta=\alpha$.
Έτσι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\alpha=\delta$.

(ii) $\alpha\neq\beta$
Εφόσον $\{\gamma\}\in\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$
άρα $\{\gamma\}=\{\alpha\}$ ή $\{\gamma\}=\{\alpha,\beta\}$.
Αν $\{\gamma\}=\{\alpha,\beta\}$ τότε $\alpha\in\{\alpha,\beta\}=\{\gamma\}$ άρα $\alpha=\gamma$ και $\beta\in\{\alpha,\beta\}=\{\gamma\}$ άρα $\beta=\gamma$ $\Rightarrow \alpha=\beta$ άτοπο

Άρα $\{\alpha\}=\{\gamma\}$ συνεπώς, αφού $\alpha\in\{\alpha\}=\{\gamma\}$ προκύπτει $\alpha=\gamma$.
Από την (*) προκύπτει $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\delta\}\}$
εφόσον $\{\alpha,\beta\}\in\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$
Προκύπτει $\{\alpha,\beta\}\in\{\{\alpha\},\{\alpha,\delta\}\}$
άρα $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}$ ή $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\delta\}$
Αν $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}$ τότε $\beta\in\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\} \Rightarrow \beta=\alpha$ άτοπο.
Άρα $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\delta\}$. Όμως $\beta\in\{\alpha,\beta\}=\{\alpha,\delta\}$ άρα $\beta=\alpha$ ή $\beta=\delta$ εφόσον $\beta\neq\alpha$ προκύπτει $\boxed{\beta=\delta}$.